SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG	**ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN V- KHỐI 10**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN	**NĂM HỌC 2020 - 2021**
NGUYỄN TRÃI	**MÔN: TOÁN**

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: (2 điểm) Giải phương trình: $2\sqrt{1+\frac{1}{x}}(x+1)=x+5$.

Câu 2: (2 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-xy=x-2y+2 \\ x^3+(y-1)(6-5x)=0 \end{cases}$.

Câu 3: (1 điểm) Tìm $f:R\to R$ thỏa mãn:

$$f(x+yf(x))=f(xf(y))-x+f(y+f(x)),\forall x,y\in R.$$

Câu 4: (2,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC. X và Y là hai điểm phân biệt trên cạnh BC sao cho góc $\angle CAX=\angle YAB$. Gọi K và S lần lượt là chân đường vuông góc từ B đến AX và AY, T và L lần lượt là chân đường vuông góc từ C đến AX, AY.

a) CMR: K, T, S, L thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm BC.

b) CMR: KL, ST, BC đồng quy.

Câu 5: (1,5 điểm) Có hai người ngoài hành tinh A và B bắt 2n người lên một chiếc UFO (n là số nguyên dương), trong đó có một số người quen nhau. A và B chơi một trò chơi theo lượt, mỗi lượt một người bắt một trong số 2n người sao cho người bị bắt phải là bạn của người bị bắt ở lượt ngay trước. A thực hiện trước, ai không chọn được người để bắt nữa thì thua. CMR: B có chiến thuật thắng khi và chỉ khi 2n người có thể được chia thành n cặp, trong đó 2 người trong một cặp thì quen nhau.

Câu 6: (1 điểm) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn với mọi số nguyên dương n ta có: $a^n+n\,|\,b^n+n$. CMR: a = b.

Hướng dẫn giải:

Câu 1: a) ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $1+\frac{1}{x} \geq 0$

Đặt $\sqrt{1+\frac{1}{x}} = t (t \geq 0)$ => $1+x = xt^2$ => PT trở thành: $2t(x+1) = xt^2 + 4$

⇔ $(t-2)(xt-2) = 0$

TH1: t = 2 => x = 1/3

TH2: xt = 2. Giải ra ta được $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

Câu 2: PT (1) ta được: $(x-y+1)(x-2) = 0$ => x = 2 hoặc x = y – 1

TH1: x = 2 => y = 3

TH2: x = y – 1 thay vào PT (2) có: $x(x^2-5x+6) = 0$ => x = 0;2;3.

Câu 3: $f(x+yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y+f(x)), \forall x, y \in R$ (1)

Thay x = y = 0 => $f(0) = f(0) + f(f(0))$ => $f(f(0)) = 0$

Thay x = 0 => $f(yf(0)) = f(0) + f(y+f(0))$

Ta thay y sao cho yf(0) = y + f(0) ⇔ y(f(0)-1) = f(0)

+ Nếu f(0) khác 1 => f(0) – 1 khác 0 => Chọn được y thỏa mãn điều trên, thay vào ta được f(0) = 0 vô lí

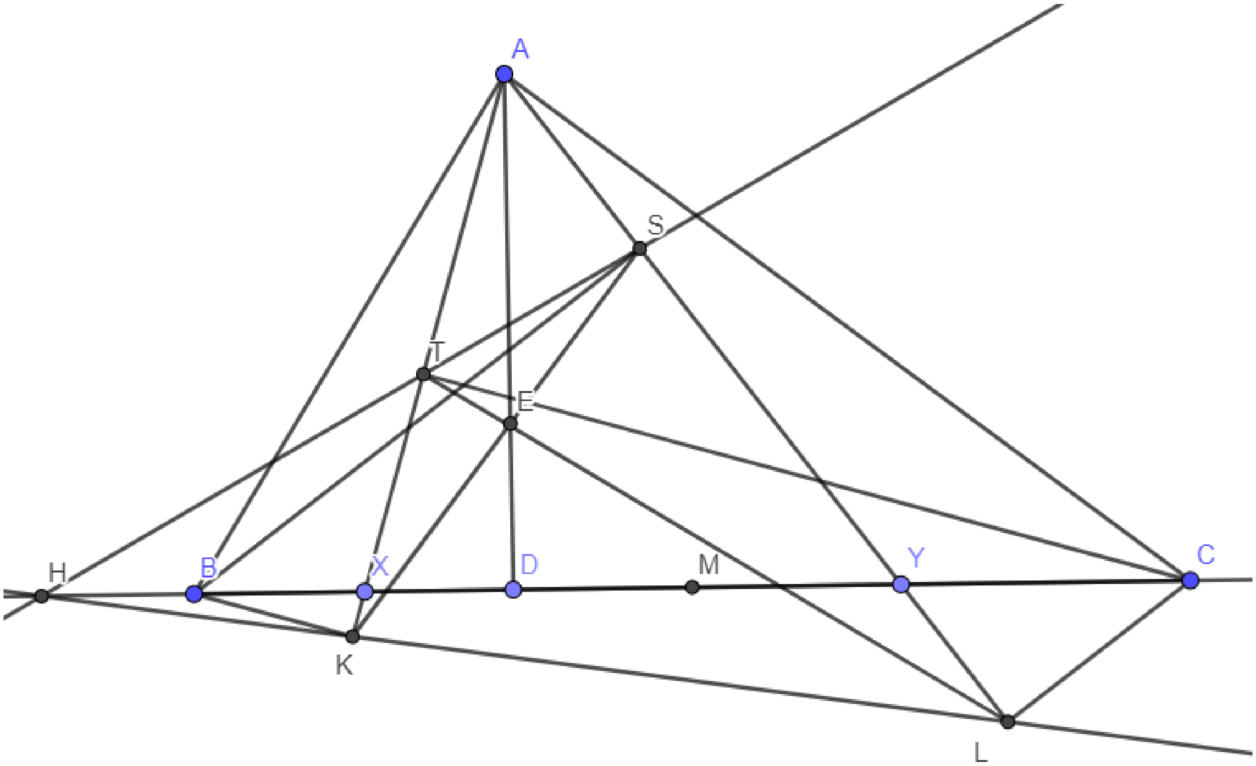
+) Nếu f(0) = 1 => $f(1) = f(f(0)) = 0$ và $f(y) = 1 + f(y+1)$

Thay y = 0 => $f(x) = f(x) - x + f(f(x))$ => $f(f(x)) = x$

Thay x = 1 => $0 = f(f(y)) - 1 + f(y)$

=> $f(f(x)) = 1 - f(x) = x$ => $f(x) = 1 - x, \forall x \in R$

Câu 4:



a) Có: ABKS và ATLC là các tứ giác nội tiếp => $SKA = SBA = TCA = TLA$ => K, T, S, L thuộc một đường tròn.

Lấy I là trung điểm TK, M là trung điểm BC thì MI là đường trung bình của hình thang BKCT => MI vuông góc KT => M thuộc đường trung trực KT.

CMTT M thuộc đường trung trực SL, kết hợp điều kiện KLSL là tứ giác nội tiếp suy ra M là tâm của đường tron (KTSL)

b) E là giao điểm của TL và SK. H là giao điểm của KL và ST. Áp dụng thế hình brocard cho tứ giác KLST là có E là trực tâm tam giác AHM => AE $\perp$ MH.

Ta sẽ CM: H thuộc đường BC bằng cách CM: AE $\perp$ BC

Gọi D là chân đường vuông góc từ A xuống BC, ta sẽ CM A, E, D thẳng hàng.

Xét các đường tròn ngoại tiếp (ABKDS), (ATDLC), (KTSL) có 3 trục đẳng phương là KS, TL và AD đồng quy => đpcm

Câu 5: <= Nếu 2n có thể chia thành n cặp 2 người quen nhau. Thì khi A chọn trước 1 người, B sẽ chọn người còn lại của cặp đó, hiển nhiên B không thể thua.

=> Nếu B có chiến thuật để thắng. Giả sử không thể chia 2n người thành n cặp đôi một quen nhau. Nếu không có ai quen nhau hiển nhiên B chắc chắn thua. Khi có các cặp quen nhau, ta giả sử 2n người có thể chia làm tối đa k cặp, gọi tập 2k người đó là K, phần còn lại là tập O, thì rõ ràng hai người bất kì trong O không quen nhau. Nếu A chọn 1 người trong O, gọi là người X, thì để B có chiến thuật thắng, B phải chọn được một người quen của X, chắc chắn phải thuộc tập K, giả sử là Y. Khi đó, nếu A chọn tiếp người bắt cặp với Y, gọi là Z thì B phải chọn được 1 người là bạn của Z, gọi là T.

- Nếu T thuộc tâp O, thì ta có thể thay cặp Y – Z thành 2 cặp X – Y và Z – T để thu được cách chia có nhiều cặp hơn, mâu thuẫn với tính lớn nhất của k.

- Nếu T thuộc tập K, thì A lại có thể chọn người 1 bắt cặp với T, quá trình cứ lặp lại như vậy rồi sẽ đến lúc B phải chọn được một người "T" nào đó không thuộc tập K, mâu thuẫn theo trường hợp trên.

Do vậy để B có chiến thuật thắng thì 2n người phải có thể bi chia làm n cặp (đcpm)

Câu 6: Từ giả thiết suy ra $b \geq a$

Có: $a^n + n \mid (b^n - a^n) + (a^n + n)$ => $a^n + n \mid b^n - a^n$ với mọi n nguyên dương.

Để CM a = b ta sẽ CM: tồn tại 1 số nguyên tố p > b – a mà p | (b – a).

Lấy một số nguyên tố p > max{a;b} => (a, p) = (b, p) = 1.

Từ $a^n + n \mid b^n - a^n$ ta sẽ nghĩ cách chọn n sao cho: $\begin{cases} p \mid a^n + n \\ b^n - a^n \equiv b - a \pmod{p} \end{cases}$

Với điều kiện (2) ta chỉ cần chọn n ≡ 1 (mod p – 1)

Khi đó điều kiện (1) trở thành: $p|a + n$ => $n \equiv -a (mod\ p)$

Do (p,p-1) = 1, theo định lí thặng du trung hoa, có thể chọn được số n sao cho:

$$\begin{cases} n \equiv 1 \ (\text{mod } p - 1) \\ n \equiv -a (mod\ p) \end{cases}.$$

Khi đó ta được $p|a^n + n\ |b^n - a^n$ và $b^n - a^n \equiv b - a(mod\ p)$

=> b – a chia hết cho p. Với p đủ lớn => b – a = 0 => b = a